

Code No. **35**

Total No. of Questions : 40 ]

[ Total No. of Printed Pages : 16

June, 2008

**MATHEMATICS**

( Kannada and English Versions )

Time : 3 Hours 15 Minutes ]

[ Max. Marks : 100

( Kannada Version )

- ಸೂಚನೆ : i) ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ **A, B, C, D** ಮತ್ತು **E** ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಾಗಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲಾ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.
- ii) ವಿಭಾಗ - **A** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **B** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **C** ಗೆ 40 ಅಂಕಗಳು, ವಿಭಾಗ - **D** ಗೆ 20 ಅಂಕಗಳು ಮತ್ತು ವಿಭಾಗ - **E** ಗೆ 10 ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ.

**ವಿಭಾಗ - A**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 1 = 10

1.  $9x \equiv 21 \pmod{30}$  ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲದ ಎಷ್ಟು ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ ?

2.  $\begin{vmatrix} 4321 & 4322 \\ 4323 & 4324 \end{vmatrix}$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಸಮುದಾಯ  $(Z_6, + \pmod{6})$  ರಲ್ಲಿ  $2 +_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$  ರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

[ Turn over

Code No. 35

2

4.  $A$  ಮತ್ತು  $B$  ಬಿಂದುಗಳ ಸ್ಥಾನೀಯ ಸದಿಶಗಳು  $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  ಮತ್ತು  $3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

ಆದಾಗ,  $P$  ಯು  $AB$  ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು  $P$  ನ ಸ್ಥಾನೀಯ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5.  $y$ -ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿರುವ ಮತ್ತು  $(a, 0)$  ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.  $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$  ರ ನಿಯತ ರೇಖೆಗೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.  $\cos^{-1}(\sin 330^\circ)$  ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

8.  $1, \omega, \omega^2$  ಗಳು ಏಕಕದ ಘನಮೂಲಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,  $(1 + \omega - \omega^2)^2$  ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

9.  $y = e^{\sqrt{x}} + x\sqrt{e}$  ಆದಾಗ,  $\frac{dy}{dx}$  ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10.  $\int e^x \left( \frac{1 + \tan x}{\cos x} \right) dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

### ವಿಭಾಗ - B

ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಹತ್ತು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :

10 × 2 = 20

11. 352 ಮತ್ತು 891 ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ( G.C.D. ) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12.  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ಕೋಶದ ಲಾಕ್ಷಣಿಕ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಮೂರು ಅಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಕುಲವು ಪರಿವರ್ತನೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14.  $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ,  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  ಮತ್ತು  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  ಸದಿಶಗಳು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಮುಖಗಳ ಘನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಚುಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಘನಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
15. ಒಂದು ಪರವಲಯದ ನಾಭಿ ( 3, 2 ) ಮತ್ತು ನಿಯತ ರೇಖೆ  $x = 1$  ಆದಾಗ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
16.  $\sin \left[ 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] = \sqrt{1-x^2}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
17. ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಮತ್ತು  $y = x$  ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರವನ್ನುಳ್ಳ ಹಾಗೂ  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$  ವೃತ್ತವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ವೃತ್ತದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
18.  $(1 - i)^9 = 16 - 16i$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
19.  $y = \log_e \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$  ಆದಾಗ,  $\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
20.  $y^2 = x$  ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು  $x$ -ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ  $45^\circ$  ಯಷ್ಟು ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿದರೆ, ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
21.  $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
22.  $(y - 2)^2 = 4a(x + 1)$  ಸಮೀಕರಣದ ಸ್ಥಿರವನ್ನು ವಿಲೋಮಗೊಳಿಸಿ, ಅವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[ Turn over

Code No. 35

4

**ವಿಭಾಗ - C**

I. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

23. a) 756 ರ ಒಟ್ಟು ಧನಾತ್ಮಕ ವಿಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $a/bc$  ಮತ್ತು  $(a, b) = 1$  ಆದಾಗ  $a/c$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

24.  $3x + y + 2z = 3$

$2x - 3y - z = -3$

$x + 2y + z = 4$

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೋಶ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

25. ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಣ  $z$  ಮೇಲೆ ಯುಗಳ ಪರಿಕ್ರಮೆ  $*$  ನ್ನು  $a * b = a + b + 3, \forall a, b \in z$  ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿದರೆ, ಇದು ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಸಂಕುಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 5

26. a)  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  ಮತ್ತು  $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$  ಆಗಿದ್ದರೆ,  $\vec{a}$  ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ  $\vec{b}$  ಮತ್ತು  $\vec{c}$  ಮೇಲಿನ ಏಕಮಾನ ಸದಿಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  ಮತ್ತು  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  ಇವು ಎರಡು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

II. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 2 × 5 = 10

27. a)  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  ವೃತ್ತಕ್ಕೆ  $(x_1, y_1)$  ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $3x - 4y + 6 = 0$  ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

28. a)  $9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y - 4 = 0$  ದೀರ್ಘವೃತ್ತದ ನಾಭಿ ಮತ್ತು ನಿಯತ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b) ನಾಭಿಲಂಬದ ಉದ್ದ =  $\frac{14}{3}$  ಮತ್ತು  $e = \frac{4}{3}$  ಇರುವ ಅತಿಪರವಲಯ ( Hyperbola ) ದ ಆದರ್ಶ ರೂಪ  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

29. a)  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$  ಆದಾಗ,  
 $xy + yz + zx = 1$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $\sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{5}{4}$  ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2

III. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ : 3 × 5 = 15

30. a)  $x$  ಅನ್ನು ಕುರಿತು  $a^x$  ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲ ತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $y = \tan^{-1} \left( \frac{4x}{4-x^2} \right)$  ಆದಾಗ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4+x^2}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

31. a)  $y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$  ಆದಾಗ,  
 $(1-x^2) y_2 - xy_1 - 4 = 0$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $x = 3 \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta$  ಮತ್ತು

$y = 2 \cos 3\theta - 3 \cos 2\theta$  ಆದಾಗ,

$\frac{dy}{dx} = -\tan \frac{\theta}{2}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 2

[ Turn over

Code No. 35

6

32. a)  $y = e^{\frac{x}{a}}$  ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಉಪಲಂಬರೇಖೆಯು ನಿಯತ ರೇಖೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಪಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಉಪಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 3

b)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

33. a)  $\int \frac{2 - 3 \tan x}{1 + 2 \tan x} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 3

b)  $\int \frac{1}{(1 + e^x)(1 - e^{-x})} dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

34. ದೀರ್ಘವೃತ್ತ  $9x^2 + 16y^2 = 144$  ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಅನುಕಲನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 5

### ವಿಭಾಗ - D

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ :  $2 \times 10 = 20$

35. a) ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿ ಅತಿಪರವಲಯದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಕೊಡಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಆದರ್ಶ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿಜವೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ. 6

b)  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

36. a)  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  ಆದಾಗ

i)  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

ii)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{3}{2} \text{ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.} \quad 6$$

b)  $[\vec{a} \times \vec{b} \vec{b} \times \vec{c} \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 4

37. a) ಒಂದು ಗೋಳದ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 8 ಚ.ಸೆ.ಮೀ. /ಸೆ.ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ ಇದೆ. ಆ ಗೋಳದ ಗಾತ್ರವು  $\frac{500\pi}{3}$  ಘ.ಸೆ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಗಾತ್ರವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 6

b)  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$  ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

38. a)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$  ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. 6

b) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಕಲನ ಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$xy \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2} (1 + x + x^2) . \quad 4$$

[ Turn over

Code No. 35

8

**ವಿಭಾಗ - E**

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ :

1 × 10 = 10

39. a)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  ಮತ್ತು  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  ಮತ್ತು  $|\vec{c}| = 7$

ಆದಾಗ,  $\vec{a}$  ಮತ್ತು  $\vec{b}$  ನಡುವಿನ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

b)  $\sqrt{3} - i$  ಸಂಕೀರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಆರ್ಗ್ಯಾಂಡ್ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿ. 4

c)  $2^{202}$  ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಕನಿಷ್ಠ ಧನಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 2

40. a) ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೊತ್ತ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ತ್ರಿಕೋಣದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಈ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ  $\frac{\pi}{3}$  ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. 4

b)  $\int \cot^4 (3x) dx$  ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 4

c)  $y = \log_5 \sqrt{1-x^2}$  ಅನ್ನು  $x$  ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಅವಕಲಿಸಿ. 2



( English Version )

- Instructions : i) The question paper has five **Parts – A, B, C, D** and **E**. Answer all the parts.
- ii) **Part – A** carries 10 marks, **Part – B** carries 20 marks, **Part – C** carries 40 marks, **Part – D** carries 20 marks and **Part – E** carries 10 marks.

**PART – A**

Answer all the ten questions.

10 × 1 = 10

1. Find the number of incongruent solutions of  $9x \equiv 21 \pmod{30}$ .
2. Evaluate  $\begin{vmatrix} 4321 & 4322 \\ 4323 & 4324 \end{vmatrix}$ .
3. In a group  $(Z_6, + \pmod{6})$ , find  $2 +_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$ .
4. Find the position vector of the point  $P$  which is the mid-point  $AB$  where the position vectors of  $A$  and  $B$  are  $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .
5. Find the equation to a circle whose centre is  $(a, 0)$  and touching the  $y$ -axis.
6. Find the equation to directrix of  $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$ .
7. Find the value of  $\cos^{-1}(\sin 330^\circ)$ .

[ Turn over

Code No. 35

10

8. If  $1, \omega, \omega^2$  are the cube roots of unity, find the value of  $(1 + \omega - \omega^2)^2$ .

9. If  $y = e^{\sqrt{x}} + x\sqrt{e}$ , find  $\frac{dy}{dx}$ .

10. Evaluate  $\int e^x \left( \frac{1 + \tan x}{\cos x} \right) dx$ .

**PART - B**

Answer any ten questions.

10 × 2 = 20

11. Find the G.C.D. of 352 and 891.

12. Find the characteristic roots of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

13. Prove that a group of order three is Abelian.

14. Find the volume of the parallelepiped whose co-terminus edges are the vectors  $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  and  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ .

15. Find the equation to the parabola whose focus is (3, 2) and its directrix is  $x = 1$ .

16. Prove that

$$\sin \left[ 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right] = \sqrt{1-x^2}.$$

17. Find the equation of a circle passing through the origin, having its centre on the line  $y = x$  and cutting orthogonally the circle

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 10 = 0.$$

18. Prove that  $(1 - i)^9 = 16 - 16i$ .

19. If  $y = \log_e \left( \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right)$ , then prove that  $\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{cosec} x$ .

20. Find the point on the curve  $y^2 = x$  the tangent at which makes an angle of  $45^\circ$  with the  $x$ -axis.

21. Evaluate  $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$ .

22. Form the differential equation by eliminating the arbitrary constant

$$(y - 2)^2 = 4a(x + 1).$$

### PART - C

- I. Answer any *three* questions : 3 × 5 = 15

23. a) Find the number of positive divisors and sum of all such positive divisors of 756. 3

- b) If  $a/bc$  and  $(a, b) = 1$ , then prove that  $a/c$ . 2

[ Turn over

Code No. 35

12

24. Solve by matrix method :

$$3x + y + 2z = 3$$

$$2x - 3y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 4.$$

5

25. Prove that the set  $\mathbb{Z}$  of integers is an Abelian group under binary operation  $*$  defined by  $a * b = a + b + 3, \forall a, b \in \mathbb{Z}$ . 5

26. a) If  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  and  $\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ , find a unit vector perpendicular to  $\vec{a}$  and in the same plane on  $\vec{b}$  and  $\vec{c}$ . 3

b) Find the area of a parallelogram whose diagonals are the vectors  $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  and  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ . 2

II. Answer any two questions :  $2 \times 5 = 10$

27. a) Find the length of the tangent from the point  $(x_1, y_1)$  to the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ . 3

b) Find the equations of tangent to the circle

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0, \text{ which are perpendicular to}$$

$$3x - 4y + 6 = 0.$$

2

28. a) Find the focus and equation to the directrix of the ellipse

$$9x^2 + 5y^2 - 36x + 10y - 4 = 0. \quad 3$$

- b) Find the equation to the hyperbola in the standard form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ given that length of latus rectum} = \frac{14}{3} \text{ and}$$

$$e = \frac{4}{3}. \quad 2$$

29. a) If  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ , prove that

$$xy + yz + zx = 1. \quad 3$$

- b) Find the general solution of  $\sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{5}{4}$ . 2

III. Answer any *three* of the following questions :

$3 \times 5 = 15$

30. a) Differentiate  $a^x$  w.r.t.  $x$  by first principles. 3

- b) If  $y = \tan^{-1} \left( \frac{4x}{4-x^2} \right)$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4+x^2}$ . 2

31. a) If  $y = (\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2$ , prove that

$$(1-x^2) y_2 - xy_1 - 4 = 0. \quad 3$$

- b) If  $x = 3 \sin 2\theta + 2 \sin 3\theta$ , and

$$y = 2 \cos 3\theta - 3 \cos 2\theta,$$

prove that  $\frac{dy}{dx} = -\tan \frac{\theta}{2}$ . 2

[ Turn over

32. a) Prove that in the curve  $y = e^{\frac{x}{a}}$  the subnormal varies as the square of the ordinate and subtangent is constant. 3

b) Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$ . 2

33. a) Evaluate  $\int \frac{2 - 3 \tan x}{1 + 2 \tan x} dx$ . 3

b) Evaluate  $\int \frac{1}{(1 + e^x)(1 - e^{-x})} dx$ . 2

34. Find the area of the ellipse  $9x^2 + 16y^2 = 144$  by integration. 5

**PART - D**

Answer any two of the following questions : 2 × 10 = 20

35. a) Define hyperbola as a locus and derive the standard equation of the hyperbola in the form  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . 6

b) Prove that  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$ . 4

36. a) If  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0 = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ , prove that

i)  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0$$

ii)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{3}{2}$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{3}{2} . \quad 6$$

b) Prove that  $[\vec{a} \times \vec{b} \vec{b} \times \vec{c} \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$  . 4

37. a) The surface area of a sphere is increasing at the rate of 8 sq.cm/sec.

Find the rate at which the radius and the volume of the sphere are increasing when the volume of the sphere is  $\frac{500 \pi}{3}$  c.c. 6

b) Find the general solution of  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ . 4

38. a) Prove that  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$  . 6

b) Find the general solution of the differential equation

$$xy \frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2} (1 + x + x^2) . \quad 4$$

[ Turn over

**PART – E**

Answer any one of the following questions :

1 × 10 = 10

39. a) If  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  and  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  and  $|\vec{c}| = 7$ ,  
find the angle between  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ . 4

b) Find the cube roots of a complex number  $\sqrt{3} - i$  and represent them in argand diagram. 4

c) Find the remainder when  $2^{202}$  is divided by 11 ( least positive remainder ). 2

40. a) The sum of the lengths of a hypotenuse and another side of a right angled triangle is given. Show that the area of the triangle is maximum when the angle between these sides is  $\frac{\pi}{3}$ . 4

b) Evaluate  $\int \cot^4 ( 3x ) dx$ . 4

c) Differentiate w.r.t.  $x$  :

$$y = \log_5 \sqrt{1 - x^2} . \quad 2$$

