



SB-0616

First Year B.Sc./B.A. Examination

March/April – 2011

Mathematics : Paper - I

(Algebra, Trigonometry & Vector Calculas)

(New Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

સુચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.  
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :

F. Y. B.Sc./B.A.

Name of the Subject :

Mathematics : Paper - 1 (New)

Subject Code No. : 0 6 1 6 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Grid for seat number

Student's Signature box

- (૨) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
(૩) જમણી બાજુ દર્શાવેલ અંક પ્રશ્નોના ગુણ છે.
(૪) પ્રયક્તિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) માંગ્યા મુજબ જવાબ લખો : ૫

- (૧) દ' મોવ્રેનું પ્રમેય લખો.
(૨) tan alpha નું alpha ની પદાવલીમાં વિસ્તરણ લખો.
(૩) Log x ની મુખ્ય કિંમત લખો.
(૪) સમીકરણોની અસમ પરિણામ સંહિતનો ઉકેલ ક્યારે ન મળે ?

(૫) d/dt { [a b c] } = .....

(બ) નીચેનાની ગણતરી કરીને જવાબ આપો : ૧૦

- (૧) A [2 -1 4; 6 -3 12] માટે rho\_R(A) શોધો.
(૨) શ્રેણિક A નાં લાક્ષણિક બીજો -2, -2 અને 4 હોય તો A નું લાક્ષણિક સમીકરણ મેળવો.
(૩) x = cosh^2 theta + sinh^2 theta, y = 2 sin h theta . cosh theta સમીકરણો માંથી theta નું નિરસન કરો.

(૪) સાબિત કરોકે  $\sin 2x + i \sinh 2y = 2 \sin(x + iy) \cdot \cos(x - iy)$ .

(૫) સદિશ  $\vec{a} = (x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$  સોલેનોઈડલ છે ?

- ૨ (અ)  $\cos n\theta$  અને  $\sin n\theta$  નું  $\cos \theta$  અને  $\sin \theta$  ની પદાવલિમાં વિસ્તરણ મેળવો. (જ્યાં  $n$  ધનપૂર્ણાંક છે.) ૬
- (બ) સાબિત કરો કે  $\tan^{-1}(\cosh \theta - \sinh \theta) = \frac{1}{2} \sin^{-1}(\operatorname{sech} \theta)$ . ૬
- (ક) સાબિત કરો કે  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta + 2 \sin \theta - \sin 3\theta}{\theta + \tan \theta - \tan 2\theta} = -\frac{25}{14}$ . ૬

**અથવા**

- ૨ (અ)  $\cos \alpha$  નું  $\alpha$  ની પદાવલિમાં વિસ્તરણ મેળવો. (જ્યાં  $\alpha$  રેડિયનમાં છે.) ૬
- (બ) સાબિત કરો કે ૬
- $$(2 \cosh \theta - 1)(2 \cosh 2\theta - 1)(2 \cosh 4\theta - 1)(2 \cosh \theta + 1) = 2 \cosh 8\theta + 1$$
- (ક) જો  $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}r\right)$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  હોય તો સાબિત કરો ૬
- કે  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots$  અનંત સુધી  $= \cos \pi$ .

- ૩ (અ)  $\operatorname{Log}(\alpha + i\beta)$  ની કિંમત શોધો (જ્યાં  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). ૬
- (બ)  $\frac{e^{i\theta}}{1 - k e^{i\phi}}$  નું વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક અંશોમાં વિયોજન કરો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે  $\operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) = \frac{1}{4}\{(4n + 1)\pi + i \log 3\}$ . ૬

**અથવા**

- ૩ (અ) યુલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો અને તે પરથી  $\cos \theta$  અને  $\sin \theta$  ને ધાંતાકીય વિધેયના સ્વરૂપે દર્શાવો. ૬
- (બ) જો  $\alpha + i\beta = \sin^{-1}(u + iv)$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\sin^2 \alpha$  અને ૬
- $$\cosh^2 \beta$$
- બીજ હોય એવું સમીકરણ
- $x^2 - (1 + u^2 + v^2)x + u^2 = 0$
- છે.
- (ક) સાબિત કરો કે  $\log \sin(x + iy) = \frac{1}{2} \log \frac{(\cosh 2y - \cos 2x)}{2}$  ૬
- $$+ i \tan^{-1}(\cot x \cdot \tanh y).$$

- ૪ (અ) સાબિત કરો કે દરેક ચોરસ શ્રેણિક  $A$  ને અનન્ય રીતે  $P + i Q$  ૬
- વડે દર્શાવી શકાય છે, જ્યાં  $P$  અને  $Q$  હર્મિટીઅન શ્રેણિકો છે.

(બ) જો  $A = [a_{ij}]$  જ્યાં  $a_{ij} = i \times j$  હોય તો દર્શાવો કે  $A$  સંમિત શ્રેણિક છે.  $\text{૬}$

અને જો  $a_{ij} = i^2 - j^2$  હોય તો દર્શાવો કે  $A$  વિસંમિત છે.

(ક)  $n$ - અવ્યક્ત ચલોની સુરેખ સંહિતો  $A_1 X = B_1$  તથા  $A_2 X = B_2$   $\text{૬}$   
ક્યારે સમકક્ષ કહેવાય ? દર્શાવો કે

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 3 \\ 3y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{array} \right\} \text{ તથા } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \\ x - 2y = 1 \\ 3y + z = 0 \end{array} \right. \text{ સમકક્ષ છે.}$$

અથવા

૪ (અ) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ને હાર-સોપાન સ્વરૂપમાં દર્શાવો.  $\text{૬}$

(બ) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$  માટે  $\rho_R(A)$  મેળવો.  $\text{૬}$

(ક) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  નો વ્યસ્ત શ્રેણિક પ્રાથમિક હાર-પ્રક્રિયાઓનો  $\text{૬}$

ઉપયોગ કરીને મેળવો.

૫ (અ) નીચે આપેલી સુરેખ સમપરિણામ (H) સંહિતને ઉકેલો :  $\text{૬}$

$$x + y - 3z + 2w = 0$$

$$2x - y + 2z - 3w = 0$$

$$3x - 2y + z - 4w = 0$$

$$-4x + y - 3z + w = 0$$

(બ) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  માટે કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનું સમર્થન કરો.  $\text{૬}$

(ક) (૧) જો  $A$  અને  $B$  સામાન્ય ચોરસ શ્રેણિકો હોય તો દર્શાવો કે  $A^{-1}B$   $\text{૬}$

અને  $BA^{-1}$ નાં લાક્ષણિક બીજો સરખા હોય છે.

(૨) સાબિત કરો કે આપેલ આત્મ સદિશ  $X$  ને સંગત ફક્ત એક જ આત્મ-મૂલ્ય પ્રાપ્ત થાય છે.

અથવા

૩

SB-0616]

[Contd...

- ૫ (અ) યુગપત સમીકરણો ૬
- $$x + y + z = 6$$
- $$x + 2y + 3z = 10$$
- $$x + 2y + \lambda z = \mu$$
- ની સંહિતને  $\lambda$  અને  $\mu$  ની કઈ કિંમતો માટે
- (૧) ઉકેલ નથી ?
- (૨) અનન્ય ઉકેલ છે ?
- (૩) અસંખ્ય ઉકેલો છે ?
- (બ) શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$  નાં લાક્ષણિક બીજ શોધો અને તેમાંના સૌથી ૬
- નાનાં લાક્ષણિક બીજને સંગત લાક્ષણિક સદિશ મેળવો.
- (ક) (૧) જો સામાન્ય શ્રેણિક  $A$  નું લાક્ષણિક બીજ  $\lambda$  હોય તો દર્શાવો કે ૬
- શ્રેણિક  $adjA$  નું લાક્ષણિક બીજ  $|A|/\lambda$  છે.
- (૨) સાબિત કરો કે આપેલા આત્મ મૂલ્યને સંગત જુદા જુદા આત્મ ૬
- સદિશો મળે છે.
- ૬ (અ) જો  $\vec{a}$  અને  $\vec{b}$  એ અદિશ ચલ  $t$  ના વિકલનીય સદિશ વિધેયો હોય તો ૬
- $$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$$
- શોધો અને તે પરથી સાબિત કરો કે
- $\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$
- (બ) કોઈક બિંદુ-કણ એ રીતે ગતિમાન થાય છે કે જેથી તેનો સ્થાન સદિશ ૬
- $$\vec{r} = \cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}$$
- (જ્યાં
- $\omega$
- અચળ છે.) દર્શાવો કે
- (૧) બિંદુ-કણનો  $\vec{r}$  એ  $\vec{r}$  ને લંબ છે.
- (૨)  $|\vec{a}| \propto |\vec{r}|$ .
- (ક) જો  $f = x^3 + y^3 + 3xyz$  હોય તો  $grad f$  ની કિંમત શોધો તથા ૬
- $grad f$  અપરિભ્રમણશીલ છે કે નહીં તે નક્કી કરો.
- અથવા**
- ૬ (અ) સદિશ બિંદુ વિધેય  $\vec{f}$  ના કર્લની (curl) વ્યાખ્યા આપી સાબિત કરો કે ૬
- $$curl(\phi \vec{v}) = (grad \phi) \times \vec{v} + \phi curl \vec{v}.$$
- (બ) જો  $\vec{f} = xy^2 \hat{i} + 2x^2y \hat{j} - 3yz^2 \hat{k}$  હોય તો  $(1, -1, 1)$  બિંદુએ  $div \vec{f}$  ૬
- અને  $curl \vec{f}$  મેળવો.

- (ક) જો  $\vec{r} = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + at \tan \alpha \hat{k}$  હોય તો  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$  ની કિંમત શોધો. 5

### ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instructions No. 1 of the page No. 1  
 (2) Figures to the right indicate marks.  
 (3) Follow usual notations.

- 1 (a) Answer the following : 5  
 (i) State De' Moivre's theorem.  
 (ii) Write expansion of  $\tan \alpha$  in terms of  $\alpha$ .  
 (iii) Write the principal value of  $\text{Log } x$ .  
 (iv) State the condition that non-homogeneous system of equations has no solution.  
 (v)  $\frac{d}{dt} \left\{ \left[ \vec{a} \vec{b} \vec{c} \right] \right\} = \dots\dots\dots$
- (b) Answer the following with calculation. 10  
 (i) If  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$  then find  $\rho_R(A)$ .  
 (ii) If characteristic roots of a matrix A are  $-2, -2$  and  $4$  then find characteristic equation of A.  
 (iii) Eliminate  $\theta$  from  $x = \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta$  and  $y = 2 \sinh \theta \cosh \theta$ .  
 (iv) Prove that  $\sin 2x + i \sinh 2y = 2 \sin(x + iy) \cdot \cos(x - iy)$ .  
 (v) Whether vector  $\vec{a} = (x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$  is solenoidal.
- 2 (a) Obtain the expansion of  $\cos n\theta$  and  $\sin n\theta$  in terms of  $\cos \theta$  and  $\sin \theta$  (where  $n \in N$ ) 6  
 (b) Prove that  $\tan^{-1}(\cosh \theta - \sinh \theta) = \frac{1}{2} \sin^{-1}(\text{sech } \theta)$ . 6  
 (c) Prove that  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta + 2 \sin \theta - \sin 3\theta}{\theta + \tan \theta - \tan 2\theta} = -\frac{25}{14}$ . 6

OR

- 2 (a) Obtain the expansion of  $\cos \alpha$  in terms of  $\alpha$  (where  $\alpha$  is in radian). **6**  
 (b) Prove that **6**  
 $(2 \cosh \theta - 1)(2 \cosh 2\theta - 1)(2 \cosh 4\theta - 1)(2 \cosh \theta + 1) = 2 \cosh 8\theta + 1$   
 (c) If  $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{2}r\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}r\right)$ ,  $r = 1, 2, 3, \dots$  then prove that **6**  
 $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots$  upto infinity =  $\cos \pi$ .

- 3 (a) Find the value of  $\text{Log}(\alpha + i\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in R$ . **6**  
 (b) Separate  $\frac{e^{i\theta}}{1 - k e^{i\phi}}$  into its real and imaginary parts. **6**  
 (c) Prove that  $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) = \frac{1}{4}\{(4n + 1)\pi + i \log 3\}$ . **6**

**OR**

- 3 (a) State and prove Euler's theorem and hence express  $\cos \theta$  and  $\sin \theta$  in terms of exponential function. **6**  
 (b) If  $\alpha + i\beta = \sin^{-1}(u + iv)$  then prove that the equation **6**  
 having roots  $\sin^2 \alpha$  and  $\cos^2 \beta$  is  $x^2 - (1 + u^2 + v^2)x + u^2 = 0$   
 (c) Prove that.  $\log \sin(x + iy) = \frac{1}{2} \log \frac{(\cosh 2y - \cos 2x)}{2}$  **6**  
 $+ i \tan^{-1}(\cot x \cdot \tanh y)$

- 4 (a) Prove that every square matrix A can be expressed **6**  
 uniquely as  $P + i Q$  where P and Q are hermitian matrices.  
 (b) If  $A = [a_{ij}]$  where  $a_{ij} = i \times j$  then show that matrix A **6**  
 is symmetric and if  $a_{ij} = i^2 - j^2$  then show that A is skew symmetric.  
 (c) When two linear systems  $A_1 X = B_1$  and  $A_2 X = B_2$  **6**  
 of equations in n-unknowns are called equivalent. Show that following system are equivalent.

$$\left. \begin{matrix} 2x + 3y + 2z = 3 \\ 3y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{matrix} \right\} \text{ and } \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \\ x - 2y = 1 \\ 3y + z = 0 \end{matrix} \right.$$

**OR**

4 (a) Express a matrix  $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  into the row-reduced Echelon form. **6**

(b) Find  $\rho_R(A)$  for matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ . **6**

(c) Find the inverse of a matrix  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  by applying elementary row-operations. **6**

5 (a) Solve the following homogeneous system of linear equations : **6**

$$\begin{aligned} x + y - 3z + 2w &= 0 \\ 2x - y + 2z - 3w &= 0 \\ 3x - 2y + z - 4w &= 0 \\ -4x + y - 3z + w &= 0 \end{aligned}$$

(b) Justify Cayley – Hamilton theorem for a matrix **6**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & - \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) (i) For non-singular matrices  $A$  and  $B$  show that eigen values of  $A^{-1}B$  and  $BA^{-1}$  are same. **6**  
(ii) Prove that there exist unique eigen value corresponding to a given eigen vector  $X$ . **6**

**OR**

5 (a) The system of linear equation is **6**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

find the value of  $\lambda$  and  $\mu$  for which the system has

- (i) No solution
- (ii) Unique solution and
- (iii) Infinitely many solutions.

- (b) Find the eigen values of a matrix  $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$  6

and obtain eigen vector corresponding to the smallest eigen value.

- (c) (i) If eigen value of a non-singular matrix A is  $\lambda$  6  
 then show that eigen value of matrix  $adjA$  is  $\frac{|A|}{\lambda}$ .  
 (ii) Prove that there exist infinite eigen vectors corresponding to a given eigen value.

- 6 (a) If  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are differentiable vectors of scalar 6  
 variable  $t$  then find  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$  and hence prove that

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} \right) = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}.$$

- (b) A particle is moving such that its position vector 6  
 $\vec{r} = \cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}$  (where  $\omega$  is constant) show that  
 (i) Velocity of a particle  $\vec{v}$ , is perpendicular to  $\vec{r}$ .  
 (ii)  $|\vec{a}| \propto |\vec{r}|$ .  
 (c) If  $f = x^3 + y^3 + 3xyz$  then find  $grad f$  and check wether 6  
 $grad f$  is irrotational.

OR

- 6 (a) Define the 'curl' of a vector point function  $\vec{f}$  and 6  
 prove that  
 $curl(\phi \vec{v}) = (grad \phi) \times \vec{v} + \phi curl \vec{v}$ .  
 (b) If  $\vec{f} = xy^2 \hat{i} + 2x^2y \hat{j} - 3yz^2 \hat{k}$  then find  $div \vec{f}$  and  $curl \vec{f}$  6  
 at point (1, -1, 1).  
 (c) If  $\vec{r} = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + at \tan \alpha \hat{k}$  then find the value of 6

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right].$$