

6246/M11

OCTOBER 2007

Paper I — CALCULUS AND CLASSICAL ALGEBRA

(For those who joined in July 2003 and after)

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (8 × 5 = 40 marks)

Answer any EIGHT questions.

1. $\sin 3x \cos x$ -ன் n -ஆவது வகைக் கெழுவைக் காண்க.

Find the n^{th} differential coefficient of $\sin 3x \cos x$.

2. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் மீச்சிறுமம் முதலிய மதிப்புகளைக் காண்க.

Find the maximum and minimum values of the function $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.

3. $r = a(1 - \cos \theta)$ என்ற வளைவரைக்கு ஆரத் திசையன் மற்றும் தொடுகோடு இவற்றின் இடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

Find the angle between the radius vector and the tangent for the curve $r = a(1 - \cos \theta)$.

4. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 - 6xy + 7y^2 - 8y = 0$

என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

Find the radius of curvature of the curve given by $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + 5x^2 - 6xy + 7y^2 - 8y = 0$.

5. $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta$ -வின் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan \theta) d\theta$.

6. $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ -ன் வரையறை $f(x) = x|x|$ எனில் அது ஒரு ஒற்றைப் படைச் சார்பு என்று நிறுவுக.

Prove that the function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x|x|$ is an odd function.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ என்று நிறுவுக.

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$.

8. $\sum \frac{n^n}{n!}$ -ன் ஒருங்கும் தன்மையைச் சோதிக்கவும்.

Test the convergence of $\sum \frac{n^n}{n!}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$ என்பது 0 மற்றும் 1-ன்

இடையே இருக்கும் என்று நிறுவுக.

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$ exists and

lies between 0 and 1.

10. முக்கோண கணிப்புத் தொடரின் வரையறை யாது? ஒரு எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

Define a trigonometric series. Give an example.

11. $(1 - 2x)^{-2}$ என்பதன் விரிவில் பொது உறுப்பைக் காண்க.

Find the general term in the expansion of $(1 - 2x)^{-2}$.

12. $1 + \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 10 \cdot 15} + \dots$ என்ற தொடரின்

∞ -வரையிலான கூடுதலைக் காண்க.

Sum to ∞ the series $1 + \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 10 \cdot 15} + \dots$.

SECTION B — (6 × 10 = 60 marks)

Answer any SIX questions.

13. $y = \cos(\log x)$

எனில்

$x^2 y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 + 1)y_n = 0$ என்று நிறுவுக.

If $y = \cos(\log x)$ prove that

$x^2 y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 + 1)y_n = 0$.

14. $y^2 = 4ax$, என்ற சாய்மாலையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலான கீழ் தொடுகோடு கிடை அச்சுத் தொலைவின் இரு மடங்காக இருக்கும் என்றும் கீழ் செங்கோடு மாறிலியாக இருக்கும் என்றும் நிறுவுக.

Prove that for the parabola $y^2 = 4ax$, sub-tangent at any point is double the abscissa and sub-normal is a constant.

15. $a^2 + b^2 = k^2$ எனில், $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோடுகளின் குடும்பத்தின் தழுவினைக் காண்க.

Find the envelope of the family of straight lines

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ where $a^2 + b^2 = k^2$.

16. $m, n \geq 1$ எனில் $\int \sin^m x \cos^n x dx$ -ன் சுருக்க வாய்ப்பாட்டைக் காண்க.

Establish a reduction formula for $\int \sin^m x \cos^n x dx$ where $m, n \geq 1$.

17. $(0, \pi)$ -யில் $f(x) = \pi - x$ என்ற சார்பின் பூரியர் கிடக்கைத் தொடரைக் காண்க.

Find the Fourier cosine series for the function $f(x) = \pi - x$ in $(0, \pi)$.

18. $a > 0$ என்பது ஏதேனுமொரு மெய்யெண் எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ என்று நிறுவுக.

Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ where $a > 0$ is any real number.

19. $\sum \frac{1}{n^p}$ என்ற இசைத் தொடர், $p > 1$ எனில் ஒருங்கும் தன்மை உடையதாகவும் $p \leq 1$ எனில் விரியும் தன்மை உடையதாகவும் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

Prove that the harmonic series $\sum \frac{1}{n^p}$ converges if $p > 1$ and diverges if $p \leq 1$.

20. லீப்னிட்ச் சோதனையைப் பயன்படுத்தி $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ என்ற தொடரின் ஒருங்கும் தன்மையைப் பற்றி விவாதிக்கவும்.

Using Leibnitz's test, discuss the convergence of the series $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$.

21. ஈருறுப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ -ன் மதிப்பை சரியாக ஐந்து பதின்பகுப்புகள் வரைக் காண்க.

Using Binomial theorem, find the value of $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ correct to five places of decimals.

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$ என்று நிறுவுக.

Prove that $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n+1}{(2n+1)!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$.
