

Paper VI — REAL AND COMPLEX ANALYSIS

(For those who joined in July 2003 and after)

Time : Three hours

Maximum : 100 marks

SECTION A — (8 × 5 = 40 marks)

Answer any EIGHT questions.

All questions carry equal marks.

1.  $(0, 1]$  எண்ணிடத்தக்கது அல்ல என்று நிறுவுக.

Prove that  $(0, 1]$  is uncountable.

2. ஒரு முழுமையான மெட்ரிக் வெளியை வரையறு. தனித்தனி வெளியும் முழுமையானதே என்று நிறுவுக.

Define a complete metric space. Prove that discrete space is complete.

3.  $f : [0, 1] - \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = x^2$  என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின் அது சீரான தொடர்ச்சியுடைய சார்பு என்று நிறுவுக.

Prove that  $f : [0, 1] - \mathbf{R}$  defined by  $f(x) = x^2$  is uniformly continuous.

4. இடையான மதிப்புத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove intermediate value theorem.

5. ஒரு அடர்த்தியான மெட்ரிக் வெளியை வரையறு. வழக்கமான மெட்ரிக்குடன் கூடிய  $\mathbf{R}$  அடர்த்தியானது அல்ல என்று நிறுவுக.

Define a compact metric space. Prove that  $\mathbf{R}$  with usual metric is not compact.

6. ஒரு அடர்த்தியான மெட்ரிக் வெளியின் மேல் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்கும் ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு சீரான தொடர்ச்சியுடையதாய் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

Prove that a continuous function defined on a compact metric space is uniformly continuous.

7.  $Z_1$  மற்றும்  $Z_2$  எனபன ஏதேனும் இரண்டு கலப்பெண்கள் எனில்  $\overline{Z_1 \times Z_2} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$  என்றும்  $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$  என்றும் நிறுவுக.

If  $Z_1$  and  $Z_2$  are any two complex numbers, prove that  $\overline{Z_1 \times Z_2} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$  and  $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ .

8.  $f(z) = ze^{-z}$  என்ற சார்பிற்கு  $C - R$  சமன்பாடுகளை சரிபார்க்க.

Verify  $C - R$  equations for the function  $f(z) = ze^{-z}$ .

9.  $-1, 0, 1$  இவற்றை முறையே  $-1, -i, 1$  இவற்றின் மேல் மாற்றம் செய்யும் இரு நேர்கோட்டு மாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation that maps  $-1, 0, 1$  onto  $-1, -i, 1$  respectively.

10.  $C$  என்பது  $1$ -ல் தொடங்கி  $1$ -ல் முடியும்  $|z| = 1$  என்ற அரைவட்டம் எனில்  $\int_C z |\bar{z}| dz$  ன் மதிப்பைக் காண்க.

Evaluate  $\int_C z |\bar{z}| dz$  where  $C$  is the semicircle  $|z| = 1$  starting at  $1$  and ending at  $1$ .

11. இயற்கணித அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.  
State and prove fundamental theorem of algebra.

12.  $\frac{1}{(2\sin z - 1)^2}$  ன் சிறப்புப் புள்ளிகளை கண்டறிந்து வகைப்படுத்துக.

Determine and classify the singular points of  $\frac{1}{(2\sin z - 1)^2}$ .

SECTION B — (6 × 10 = 60 marks)

Answer any SIX questions.

All questions carry equal marks.

13.  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R} \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$  என்க.  $p > 1$  மற்றும்  $x, y \in \mathbf{R}^n$ .  $d$ -ன் வரையறை

$d(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p}$  எனில்  $d, \mathbf{R}^n$ -ல் ஒரு மெட்ரிக் என்று நிறுவுக.

Let  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R} \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$ . Let  $p > 1$  and  $x, y \in \mathbf{R}^n$ . If  $d$  is defined as

$d(x, y) = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right]^{1/p}$ , prove that  $d$  is a metric in  $\mathbf{R}^n$ .

14. பெய்ரின் கேட்டகரி தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.  
State and prove Baire's category theorem.

15. எந்தவொரு திறந்த இடைவெளியும்  $\mathbf{R}$ -க்கு அமைப்பொத்ததாய் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

Prove that any open interval is homeomorphic to  $\mathbf{R}$ .

16.  $\mathbf{R}$ -ன் ஒரு உள்வெளி தொடர்புள்ளதாய் இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை அது ஒரு இடைவெளி என்பதே என்று நிறுவுக.

Prove that a subspace of  $\mathbf{R}$  is connected if and only if it is an interval.

17. ஹெனி போரல் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Heine-Borel theorem.

18.  $Z_1$  மற்றும்  $Z_2$ ,  $Z\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + \alpha\bar{Z} + \beta = 0$  என்ற வட்டத்தைப் பொறுத்து தலைகீழ் புள்ளிகளாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை  $Z_1\bar{Z}_2 + \bar{\alpha} Z_1 + \alpha \bar{Z}_2 + \beta = 0$  என்பதே என்று நிறுவுக.

Prove that  $Z_1$  and  $Z_2$  are inverse points with respect to a circle  $Z\bar{Z} + \bar{\alpha}Z + \alpha\bar{Z} + \beta = 0$  if and only if  $Z_1\bar{Z}_2 + \bar{\alpha} Z_1 + \alpha \bar{Z}_2 + \beta = 0$ .

19.  $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$  என்ற சார்பு ஒரு இசைச் சார்பு என்று நிறுவுக. அதன் யாதேனுமொரு இசை இணையினையும் காண்க.

Prove that the function  $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$  is harmonic. Also find a Harmonic conjugate.

20. மெய் அச்சை அலகு வட்டத்தின் மேல் மாற்றம் செய்யும் இரு நேர்கோட்டு மாற்றத்தைக் காண்க.

Find the bilinear transformation that maps the real axis onto the unit circle.

21. டெய்லரின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.  
State and prove Taylor's theorem.

22. மதிப்பிடுக :  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$

Evaluate :  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$